

משוואות דיפרנציאליות 1 א

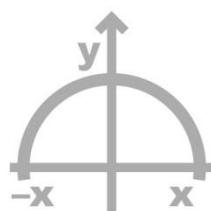


A square divided into four triangles by its diagonals. The top-left triangle has side lengths labeled 1, 1, and $\sqrt{2}$.



A coordinate system on a cyan background with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. The x-axis is labeled with 0, -x, and x.


$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1	1. משוואות מסדר ראשון
19	2. משוואות ליניאריות מסדר שני
32	3. משוואות ליניאריות מסדר ת
39	4. מערכת משוואות לינאריות
49	5. פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים
54	6. ה_transform לפלס
66	7. פרקי חוזה - אינטגרלים
88	8. ה_transform פורייה

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא	(ללא ספר)
2. הפרדת משתנים	1
3. משוואה הומוגנית	3
4. משוואה מהצורה	$(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 5
5. משוואה מדוקת	6
6. גורם אינטגרציה	8
7. משוואה לינארית מסדר ראשון	11
8. משוואת ברנולי	13
9. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקارد	14
10. פתרונות גרפיים ונוומיים למשוואת מסדר ראשון	17

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t+c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^3 + 1 \right| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - 1 \right| - \frac{5}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) + 3 \right| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{x} \right) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 4 \right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

$$\ln \left(1 + e^{\left(\frac{x}{y} \right)^2} \right) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{x}{t} \right) - \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln \left(1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) + c \quad (9)$$

משואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואת מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6 :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3 \right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2 \right)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

7) נתונה המשוואת $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$, כאשר k קבוע.

- א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואת תהיה מדויקת?
- ב. פתרו את המשוואת עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y\sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx + x\cos ydy = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $.xe^x$.

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 10) נתונה מדייר לא מדוקת

א. הוכחו : אם $e^{\int f(x)dx}$, אז $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$

ב. הוכחו : אם $e^{-\int g(y)dy}$, אז $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$

. $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$ 11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

. $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$ 12) נתונה המשוואה

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

. $(x^2 y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$ 14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא
פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה
 $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $y + x$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

(10) שאלת הוכחה.

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x + y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2(y+c) \quad (9)$$

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; \quad y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משפט הקיום והיחidot על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הב夷ה $y(2) = -1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$

- א. הוכחו ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + y$ הם פתרונות לב夷ה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.
ב. הסבירו מדוע קיומם שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הב夷ה $y(0) = 0$, $y' = \sqrt[3]{y} + 4$.

- א. הוכחו שה夷ה מקיימת את תנאי משפט הקיום.
ב. הוכחו שה夷ה אינה מקיימת את תנאי היחידות.
ג. הוכחו של夷ה קיים פתרון ייחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את ה夷ה $y(4) = 0$, $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$

4) נתונה ה夷ה $y(0) = 4$, $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$.

- א. הראו שכל פתרון של夷ה בהכרח חסום מלמטה.
ב. הראו שכל פתרון של夷ה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המדייר $dy = (2x + y^3)dx$.

- א. הראו שעבור $x = y$ המדייר ליניארי מסדר ראשון, ופתרו אותה ככזאת.
ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למדייר ליניארי, מהן נקודות ההתחלה (x_0, y_0) , כך שלmdiיר הנתונה קיים פתרון ייחיד העובר דרך (x_0, y_0) .
צטו את המשפט עבור המדייר הליניארי שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון ייחיד העובר דרך (x_0, y_0) ?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו 3 קירובי פיקارد לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $\infty \rightarrow n$.

7) כמה פתרונות יש בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \quad ? \quad (x > 0) \end{cases}$

8) נתונה בעיית התחלאה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלאה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

תשובות סופיות

- ב. שאלת הסבר.
ג. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
ג. שאלת הוכחה.
- $y(x) = 0$
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
- א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחליה (x_0, y_0) , שverbora $\neq 0$.
- הקטע הארוך ביותר: $(0, \infty)$ או $(-\infty, 0)$.
- $y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x^2, \quad y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, \quad y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$.
א. $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$
ב. $y_n(x)$ אחד.
ג. הוכחה.
- א. $[0, 1]$ ב. $[-0.1, 0.1]$ ג. הוכחה.
- א. $[-0.5, 0.5]$ ב. $[-0.1, 0.1]$ ג. הוכחה.
- א. $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
ב. $[-0.08, 0.08]$
ג. הוכחה.
- א. $(0, 1)$ הוכחה.
ב. $(1, 0)$ הוכחה.
ג. $(2, 0)$ הוכחה.

פתרונות גרפים ונומריים למשואה מסדר ראשון

שאלות

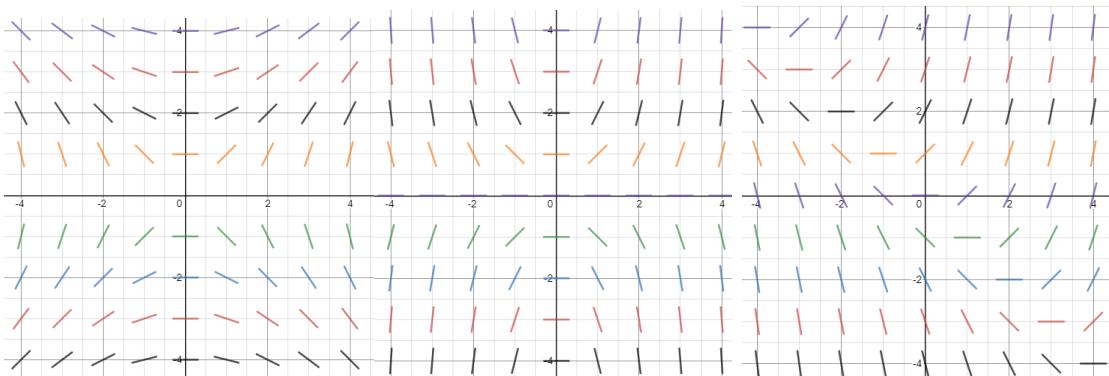
1) שרטטו שדה כיוונים למשואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א-ג' לשדה הכוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

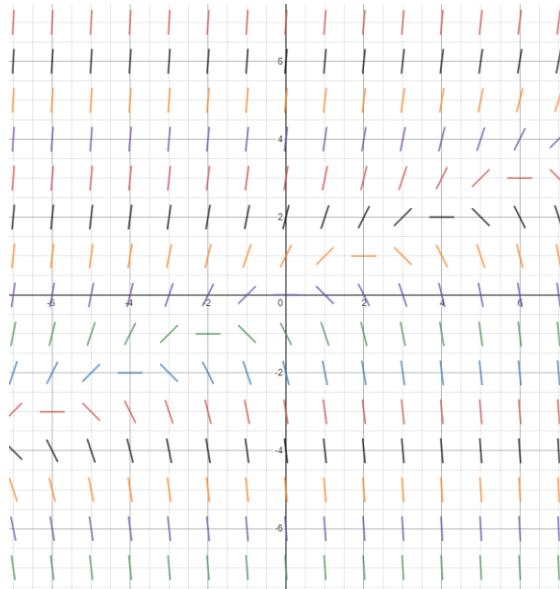
איור 1

3) נתונה המש"ר $y' = y - x$, $y(0) = 2$

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

4) נתונה המש"ר $y' = x + y$, $y(1) = 2$

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות**(1)****(2)** איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

$y(1) = 4.593 \quad \text{(3)}$

$y(2) = 6.95328 \quad \text{(4)}$

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 2 - משוואות לינאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משואה חסраה - שיטת הורדת סדר המשואה	19
2. משואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים	21
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחס המושכל"	23
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"	25
5. וריאציות פרמטרים	27
6. משואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משואה אוילר (לא ספר)	28
7. משואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל	29
8. הורונסקיון ושימושיו	31
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני	31

משואה חסירה – שיטת הורדת סדר המשווהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k ; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k) ; y = c \quad (8)$$

משואה לינארית הומוגנית, עם מקדים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1, 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4\frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 3; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2}y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

- 12)** נתונה המד"ר $yy'' + (y')^2 = 0$
- הראו כי $y_1 = \sqrt{x}$ ו- $y_2 = 4$ הם פתרונות של המד"ר.
 - הראו כי הפתרון $(x) = y_1(x) + y_2(x)z$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סטייה לעקרון הסופרפויזיה?

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}} \quad (6)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (7)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5}x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5}x \right) \right] \quad (10)$$

$$y = 4e^{-\frac{|x|}{a}} \quad (11)$$

12) שאלת הוכחה.

השווואת מקדים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

השווואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

וリアצית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad ; \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1 + e^{-x}) - (1 + e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y_1(x) = e^{2x}$, $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$

2) פתרו $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x},$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x) = e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

2) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיין ו שימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע $[0, \pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x) = \sin x^2$, $y_2(x) = \cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $y'' - 4x^3y = 0$, בקטע $(-\infty, \infty)$.
חשבו את ההוורונסקיין של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x = 0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ הן פתרונות של המשוואה $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_1 = x^3$, $y_2 = |x^3|$, בקטע $[-4, 4]$.
א. חשבו את ההוורונסקיין של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות ליניארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלות מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy'' - 2y' = 0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I , ונניח כי ההוורונסקיין שלהם שונה מאפס ב- I .
הוכיחו כי קיימת משווהה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשמו משווהה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $0 < x < x_0$, שהפונקציות $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^4$ הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר בקטע I , כאשר q, p רציפות בקטע I .

הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c) = y_2(c) = 0$, אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

(1) לא.

(2) $W = -2x$

(3) כן.

(4) א. $W = 0$. ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

(5) א. שאלת הוכחה. ב. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$.

(6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $x \cdot y'' - 4y = 12x$.

א. פתרו את המשוואה.

$$\text{ב. מצאו פתרון המקיים: } \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$$

$$\text{ג. נסו למצוא פתרון המקיים: } \begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0) = 1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

$$2) \text{נתונה הבעה: } \begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי $y_1(x) = x^2$ ו- $y_2(x) = 1$, הם פתרונות של הבעה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משווהה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהfonקציות $y = 4x$ ו- $y = \sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $x \cdot y'' - 4y = 4e^{2x} - 3e^{-2x}$ ב. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 3 - משוואות לינאריות מסדר ח

תוכן העניינים

1. משואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים	32
2. שיטת השוואת מקדמים	35
3. שיטת וריאצית הפרמטרים	37
4. הורונסקיון ושימושיו	38

משואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-15:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 6y' - 12y + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

- 16)** נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,
אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$.
- מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.
 - מצאו את המשוואה.

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + \\ + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2 e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + \\ + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y''''' - 6y'''' + 27y''' - 68y'' + 135y' - 150y + 125y = 0 . \blacksquare$$

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 4\cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאצית הפרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1+e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(e^x + 1 - \ln(e^x + 1) \right) + e^x \left(-\ln(e^x + 1) \right) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

הוורונסקיין ו שימושיו

שאלות

- 1)** האם קיימת מד"ר מהצורה $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1, 1]$, כך שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה?
- 2)** נתונות הפונקציות $y_1(x) = 4 - x$, $y_2(x) = 4 + x$, $y_3(x) = 20 + x$.
 א. חשבו את הוורונסקיין של הפונקציות.
 ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty, \infty)$.
 ג. ענו שוב על סעיף ב', במידעה שלוש הפונקציות הן פתרונו של המד"ר $y''' = 0$.
- 3)** פתרו את הסעיפים הבאים:
 א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמיים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיין שלהם שונה מאפס ב- I . הוכיחו כי קיימת משווהה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I , כך ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.
 ב. רשמו משווהה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

- 1)** לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודת אחת $x = 0$.
- 2)** א. $W = 0$. ג. הפונקציות תלויות.
- 3)** א. שאלת הוכחה. ב. $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$, $x \neq 0$.

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברת לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים.....	39
2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכsson	41
3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאצית הפרמטרים	46
4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה	48

חזרה אלgebra לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטוריים העצמיים של A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$x=0, \quad x=1, \quad x=2, \quad v_{x=0} = (-1, 0, 1), \quad v_{x=1} = (0, 1, 0), \quad v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x=6, \quad x=2, \quad x=-4, \quad v_{x=6} = (0, 0, 1), \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1) \quad x_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x=1, \quad x=3, \quad x=-2, \quad v_{x=1} = (-1, 4, 1), \quad v_{x=3} = (1, 2, 1), \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x=1, \quad x=4, \quad x=-1, \quad v_{x=1} = (1, -2, 1), \quad v_{x=4} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x=-1, \quad x=3 \quad v_{x=-1} = (-1, 2), \quad v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, \quad v_{x=1+2i} = (1+i, 2), \quad v_{x=1-2i} = (1-i, 2) \quad (7)$$

$$x=1, \quad x=1+\sqrt{3}i, \quad x=1-\sqrt{3}i, \quad v_{x=1} = (1, 1, 1), \quad , \quad (8)$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), \quad v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הרכソン

שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 1-2:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כך ש}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ נtauן } (3)$$

הוכיחו כי $z(t) = y(t)$

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 4-5:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ נtauן } (6)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

7) פתרו את מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2 = 0 \\ 3y_2' - 4y_1 - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

8) פתרו :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t)$$

הערה : בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המורכב מהפתרונות ממשי.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 9-14 :
(שימוש לב שכל המערכות אין ניתנות ללבסן)

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (9)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (10)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (11)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (12)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (13)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (14)$$

15) דמי פתר את המערכת $x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} x(t)$

$$\cdot x(t) = c_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 {}^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\cdot x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

נתון תנאי התחלה : .

עבור אילו ערכים של קבועים a, b, c , הפתרון המקיים את תנאי התחילה הנתון יהיה חסום לכל t ממשי?

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

0 (6)

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ c_3 e^t \left[\sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (8)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0.5t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2 - t + 2 \\ \frac{t^2}{2} + 1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + c_4 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ \frac{t^3}{6} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a = -c, \quad b = 2a \quad (15)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאצית הפרמטרים

שאלות

פתרו את מערכת המשוואות בשאלות 1-4 :

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x' &= x + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned} \quad (4) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(5) המירו את המשוואת $y''' + y'' - 2y = t^2$, $y''' + y'' - 2y = t^2$
במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(7) נתונה המשדר $e^{-x} y'''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$.
רשמו את המשדר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בצגה מטריציונית.

(8) נתונה המשדר $x^2 y''(x) + (1+4x^2) y(x) = \ln x$.
רשמו את המשדר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בצגה מטריציונית.

הערה: בשאלות 7 ו-8 המערכת המתבקשת היא לא עם מקדמים קבועים.
יחד עם זאת, הדרישה היא רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a = -1 \text{ נקבל}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} : \text{עבור } a \neq 1 \text{ נקבל}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3} t e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9} e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} \\ (2t-1)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -e^{2t}t^2 & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{1}{t^2} + 4\right) & -\frac{10}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ln t \end{pmatrix} \quad (8)$$

מערכת משוואות כללית – שיטת הצבה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$. z(0) = y(0) = y'(0) = 0, \text{ בהינתן} \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 5 - פתרון משואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית	49
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית	51
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות	53

פתרונות מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתרונות את המשוואות בשאלות 1-7 על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $0=x$.
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

7. זכרות: טור חזקות סביב $0=x$ שקול לטור טילור סביב $0=x$ וSKUOL לטור מקלורן.

$$y(0)=3, \quad y'(0)=12; \quad y''-2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \quad (1)$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2; \quad y''-xy=0 \quad (2)$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad (3)$$

$$(x^2+4)y''+xy=x+2 \quad (4)$$

$$y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0 \quad (5)$$

$$y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2; \quad y''+ty=e^{t+1} \quad (6)$$

$$y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0 \quad (7)$$

8. פתרו את המשווה $y(1)=1, \quad y'(1)=2; \quad y''(x)+(x-1)y(x)=e^x$ על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9. פתרו את המשווה $y(-1)=2, \quad y'(-1)=-2; \quad y''+xy'+(2x-1)y=0$ רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שצדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות סופיות

$$a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots \quad (1)$$

$$\cdot a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24} \right) x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96} \right) x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4)$$

$$a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} , \quad (n \geq 4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0 \right) x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0 \right) x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (6)$$

$$a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0 \right) t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0 \right) t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots \quad (8)$$

$$a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad (9)$$

פתרונות מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודת היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשווהה על ידי פיתוח המשווהה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (1)$$

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (3)$$

$$3x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (4)$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad (5)$$

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (6)$$

$$x^2y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (7)$$

$$x^2y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (8)$$

הערות

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשווה האינדייציאלית שונים והפרשם אינם מספר שלם. בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות סופיות

$$y = k_1 x^{1/3} \left(1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left(1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right) \quad (1)$$

$$y = k_1 x^{1/2} \left(1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left(1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right) \quad (2)$$

$$y = k_1 x^{-1} \left(1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left(1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right) \quad (3)$$

$$y = k_1 x + k_2 x^{1/3} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y &= k_1 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \\ &+ k_2 \left[\ln x \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left(\frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (6)$$

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (7)$$

$$y = -a_0 x^2 \ln x \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left(1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right) \quad (8)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 6 - התרמת לפלס

תוכן העניינים

54	1. התרמת לפלס
57	2. התרמת לפלס ההפוכה
61	3. פתרון מדר בעזרת התרמת לפלס
63	4. נוסחאות - התרמת לפלס

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נסחאות להתרמת לפלס.

שאלות

חשבו את התרמות לפלס בשאלות 1-12 בעזרת טבלת התרמות לפלס:

$$L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 1\right) \quad (2)$$

$$L(\cosh 4t) \quad (4)$$

$$L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6)$$

$$L(\sin^2 t) \quad (8)$$

$$L(t^2 \sin 4t) \quad (10)$$

$$L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12)$$

$$L(t^2 + 4t - 2) \quad (1)$$

$$L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3)$$

$$L(\sinh 10t) \quad (5)$$

$$L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7)$$

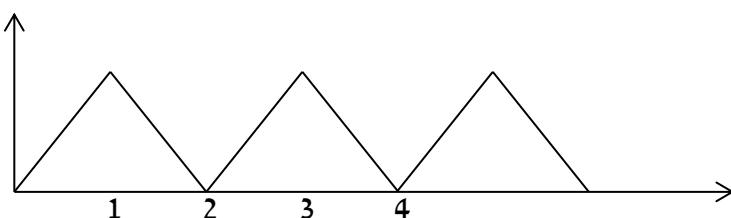
$$L(\cos^2 4t) \quad (9)$$

$$L(t^4 e^{2t}) \quad (11)$$

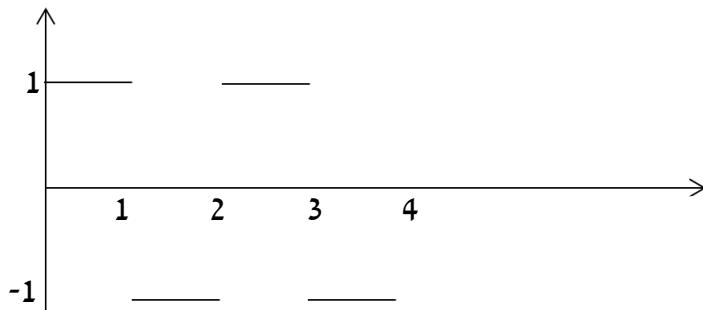
13) מצאו את התרמת לפלס של הפונקציה $\cdot g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

14) מצאו את התרמת לפלס של הפונקציה $\cdot g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$

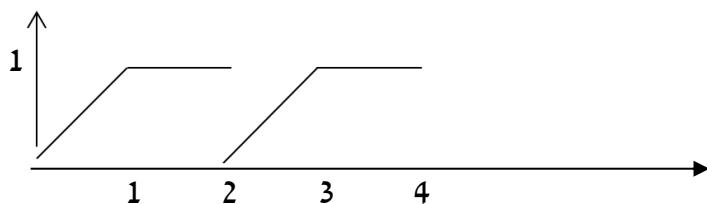
15) מצאו את התרמת לפלס של הפונקציה המוחזורת הבאה:



16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



18) הגדרו ושרטטו את פונקציית המדרגה $u(t-k)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטטו את הפונקציה $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$ פונקציית המדרגה.

20) רשמו את הפונקציה $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$ בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשמו את הנוסחה להתרמת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,

של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$.

22) חשבו את התרמת לפpls של הפונקציה הבאה : $\cdot g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$

23) חשבו את התרמת לפpls של הפונקציה הבאה : $\cdot g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$

24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הגדרו ושרטטו את פונקציית הדלתא $(t)\delta$.

ב. מהי התרמת לפpls של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

תשובות סופיות

$$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2 + 16} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad (8)$$

$$\frac{8(3s^2 - 16)}{(s^2 + 16)^3} \quad (10)$$

$$\frac{4}{(s-2)^2 + 16} \quad (12)$$

$$\frac{1-2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \quad (16)$$

$$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$

$$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2 + 25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 64} \quad (9)$$

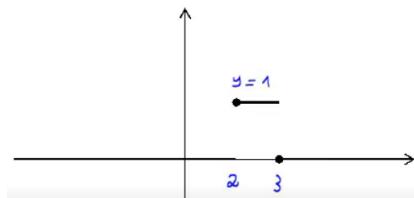
$$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$

$$\frac{1-2e^{-s} + e^{-2}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (15)$$

$$\frac{1-e^{-s} - se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (17)$$

(19)



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \mathbf{N} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4t}L(t) + 16 \frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמורות בשאלות 1-29:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

*בשאלה 27 כתבו את התוצאה بصورة מפורטת וشرطו אותה.

$$\text{נתון } (30) . F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$$

חשבו את $f(t) = L^{-1}(F(s))$, כאשר $f(\infty)$ ו- $f(0)$
פתרו בשתי דרכים שונות.

$$\text{הערה: } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

(31) הסבירו והציגו את משפט הקונволוציה.

השתמשו במשפט הקונולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

תשובות סופיות

$$\frac{t^3}{3!} \quad \text{(2)} \qquad \qquad \qquad 1 \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{3} \sin 2t \quad \text{(4)} \qquad \qquad \qquad e^{10t} \quad \text{(3)}$$

$$e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{(6)} \qquad \qquad \qquad \cos 2t \quad \text{(5)}$$

$$\frac{1}{4} t \sin 2t \quad \text{(8)} \qquad \qquad \qquad e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\} \quad \text{(7)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}} \quad \text{(10)} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{4} t \sin 2t \quad \text{(9)}$$

$$1 - 2e^{-5t} \quad \text{(12)} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \quad \text{(11)}$$

$$1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \quad \text{(14)} \qquad \qquad \qquad 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \quad \text{(13)}$$

$$e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t} \quad \text{(16)} \qquad \qquad \qquad e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t} \quad \text{(15)}$$

$$-6 + 5t + 6e^{-2t} \quad \text{(18)} \qquad \qquad \qquad e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t} \quad \text{(17)}$$

$$2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t} \quad \text{(20)} \qquad \qquad \qquad 4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t} \quad \text{(19)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t \quad \text{(22)} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t \quad \text{(21)}$$

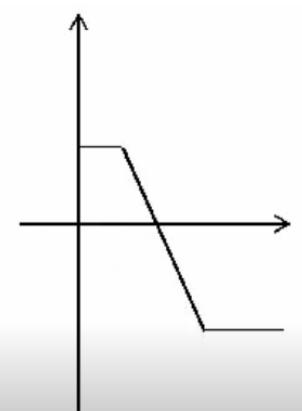
$$\cos t + e^{-2t} \quad \text{(24)} \qquad \qquad \qquad \sin t + 2e^{3t} \quad \text{(23)}$$

$$\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{(25)}$$

$$e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \quad \text{(26)}$$

$$3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3) . \text{ נ } \quad \text{(27)}$$

$$; \text{ שרטוט : } \begin{cases} 3 & t < 1 \\ 7 - 4t & 1 < t < 3 \\ -5 & t \geq 3 \end{cases} . \text{ ב }$$



$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)\left(e^{t-10} - e^{2(t-10)}\right) \quad (29)$$

$$f(0)=2 \quad f(\infty)=3 \quad (30)$$

(31) שאלת הסבר.

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4}\sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4}e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(-2\cos t + 2 - t\sin t) \quad (35)$$

פתרונות מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס :

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1 , y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1 , y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (5)$$

$$, y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ כאשר } u(t) \text{ היא פונקציית המדרגה.}$$

$$. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$. h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר } y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 , y''(0) = 3 ; y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10 \cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0 , y'(0) = 0 ; y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2 , y'(0) = -3 ; y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t-2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0 , y'(0) = 0 ; -y'' + 4y = \delta(t-2\pi) - \delta(t-\pi) \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (1)$$

$$y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad (2)$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad (3)$$

$$y(t) = t^2 \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad (5)$$

$$y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad (6)$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2)\frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad (8)$$

$$y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad (9)$$

$$y(t) = -u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} \sin(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{4}{7}u(t-2)[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2}u(t-\pi)[\sinh(2(t-\pi))] \quad (12)$$

נוסחאות – ההתמרה לפולס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n (for $n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$
$\frac{a}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \sin at$

$\frac{s+b}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \cos at$
$\frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$	\sqrt{t}
$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks} \cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n (F(s))^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$ ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
 אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציג, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$f(t)^* g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$ - קונולציה:

$$L(f(t)^* g(t)) = F(s) \cdot G(s)$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t)^* g(t) \quad L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 7 - פרקי חזרה - אינטגרלים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מיידיים	66
2. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים	69
3. אינטגרלים בשיטת ההצבה	71
4. אינטגרלים של פונקציות רצינליות	74
5. אינטגרלים טרייגונומטריים והצבות טרייגונומטריות	78
6. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת	83
7. נספח - זהויות בטריגו	87

אינטגרלים מיידיים

בסוף ספר הפרק יש נספח עם זהויות בטריגו.

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתרונות על ידי הכלל : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

(פתרונות על ידי הכלל : $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתרונות על ידי הכלל : $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 29-27 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \quad \text{(פתרונות על ידי הכלל : 29)}$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28) \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(29) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \quad \text{(פתרונות על ידי הכלל : 29)}$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$$

$$\left(\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \right) \quad \text{(פתרונות על ידי הכלל : 30)}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 33-31 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int 2\sin 4x + \cos x dx \quad (36)$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad (35)$$

$$\int \cos 4x dx \quad (34)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (30)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

$$-\frac{1}{2}\cos(4x) + \sin x + c \quad (36)$$

$$-2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c \quad (35)$$

$$\frac{1}{4}\sin(4x) + c \quad (34)$$

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת הצבה.

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1) x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c \quad \text{(3)}$$

$$\ln|\sin x| + c \quad \text{(2)}$$

$$\ln|x^2 + 1| + c \quad \text{(1)}$$

$$e^x \ln|e^x + 1| + c \quad \text{(6)}$$

$$\ln|\ln|x|| + c \quad \text{(5)}$$

$$-\ln|\cos x| + c \quad \text{(4)}$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad \text{(9)}$$

$$e^{\tan x} + c \quad \text{(8)}$$

$$e^{x^2} + c \quad \text{(7)}$$

$$\sin(\ln x) + c \quad \text{(12)}$$

$$\sin(\sin x) + c \quad \text{(11)}$$

$$\sin(2x^2 + 1) + c \quad \text{(10)}$$

$$-2 \cos(\sqrt{x}) + c \quad \text{(15)}$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c \quad \text{(14)}$$

$$\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c \quad \text{(13)}$$

$$\frac{1}{2}(\tan x)^2 + c \quad \text{(18)}$$

$$\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c \quad \text{(17)}$$

$$\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \quad \text{(16)}$$

$$\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(21)}$$

$$\sqrt{2 \sin x} + c \quad \text{(20)}$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad \text{(19)}$$

$$\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(24)}$$

$$\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(23)}$$

$$\frac{2}{9}(x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(22)}$$

אינטגרלים בשיטת הצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4} \right)^5}{5} - \frac{4}{3} \left(\sqrt{x^3+4} \right)^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2 + 1) + \cos(x^2 + 1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2 - 1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2 - 1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x \left(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6 \right) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6 \left(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x} \right) + c \quad (23)$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1} \right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1} \right)^4}{4} + c \quad (24)$$

אינטגרלים של פונקציות רצינוליות

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-19:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

חילוק פולינומיים וaintגרלים של פונקציה רצינלית

חשבו את האינטגרלים בשאלות 20-24 :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (24)$$

aintגרלים שימושיים הצבה ופונקציה רצינלית

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x-1}} dx \quad (27)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (28)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (29)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (30)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5} |x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right) + c \quad (19)$$

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (20)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (21)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (22)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (23)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (24)$$

$$-1.5 \ln\left|1 - \sqrt[3]{x^2}\right| + c \quad (25)$$

$$6 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[6]{x}\right)^3}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[6]{x}\right)}{2} + 3\left(1 + \sqrt[6]{x}\right) - \ln\left|1 + \sqrt[6]{x}\right| \right) + c \quad (26)$$

$$4 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[4]{x-1}\right)^2}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[4]{x-1}\right)^2}{2} + 3\left(1 + \sqrt[4]{x-1}\right) - \ln\left|1 + \sqrt[4]{x-1}\right| \right) + c \quad (27)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln\left|\sqrt[3]{x} + 1\right| - \frac{1}{2} \ln\left(\left(\sqrt[3]{x} - 0.5\right)^2 + 0.75\right) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (28)$$

$$-\ln\left|1 + e^x\right| + x + c \quad (29)$$

$$2\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1}\right| + c \quad (30)$$

אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

שאלות

פתרונות על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	זכרו כי :
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$	
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$	
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$	
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$	

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-24 :

$$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

פתרונות על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ x = \arcsin t \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ x = \arccos t \end{array} \right| = \int f(t)(-dt)$$

זכור כי :

חשבו את האינטגרלים בשאלות 36-25 :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (26)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (25)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (28)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (27)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (30)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (29)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (32)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (31)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (34)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (36)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (35)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרו על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \begin{cases} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{cases} = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

זכרו כי :

חשבו את האינטגרלים בשאלות 39-37 :

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos x} dx \quad (39) \qquad \int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x} \quad (38) \qquad \int \frac{1}{1+\sin x} dx \quad (37)$$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \begin{cases} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{cases} = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \begin{cases} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{cases} = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{cases} = \int f(\tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}$$

זכרו כי :

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (42) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (41) \qquad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (40)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

$$-\frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (26)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (25)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (28)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (27)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (30)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (32)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (31)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (34)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + c \quad (33)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (36)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (35)$$

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c \quad (37)$$

$$\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c \quad (38)$$

$$-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right)+c \quad (39)$$

$$-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c \quad (40)$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c \quad (41)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c \quad (42)$$

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3)$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2)$$

$$\int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11)$$

$$\int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int x \arctan x dx \quad (14)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17)$$

$$\int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20)$$

$$\int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23)$$

$$\int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

(25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

(26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

(27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int (\sin x)^4 dx$.

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4}(\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5(\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n}(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4}(-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5(x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 8 - התרמת פוריה

תוכן העניינים

1. מבוא כללי	88
2. נוסחת כיווץ והזזה	90
3. נוסחת הנגזרת	92
4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה	93
5. נוסחת המומנט	95
6. נוסחת ההתרמה ההפוכה	97
7. נוסחת התרמה כפולה	(לא ספר)
8. משפט הקונבולוציה	98

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)$

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

5) הוכחו כי התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases}$ כאשר $a, b > 0$ קבועים הינה $\cdot f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

9) הוכחו התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ הינה $\cdot f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ עבור $a > 0$

12) האם קיימת $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $\cdot f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1 - i\omega} \quad (8)$$

(9) הוכחה.

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$(12) \text{ לא. אינה רציפה בנקודות } \omega = \pm \frac{1}{2}$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r, r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2 - 4x - 1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$\text{כפי } F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

3) נתונה פונקציה $g(\omega)$ בעלת התמרת פורייה $g(x) \in G(R)$.
 מצאו פונקציה $f(x) = g(x) \cos(\omega x)$ (כטלוות ב-) בעלת התמרת פורייה $f(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

5) מצאו פונקציה שההתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$
 $F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$ רמז:

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

- 1)** נתון כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$,
 $f'(x) \cos(2x)$ מצאו התמרת פורייה של

$$\cdot F\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|\omega a|}$$

2) יהיו a ממשי כלשהו. הוכיחו כי

$$\cdot f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$$

3) מצאו פונקציה שההתמרת פורייה שלה היא Rmz :

$$\cdot F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1 + (\omega - c)^2\right] \left[1 + (\omega + c)^2\right]}$

2) מצאו פונקציה שההתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ כאשר $a, b > 0$ קבועים, היא $\cdot g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה $\cdot F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$ כי

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $\cdot F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

6) נניח כי $f \in G(R)$ ונגידיר $g(\omega) = f(3x-2) \cdot \cos(x)$ על ידי $\cdot g(x) = f(3x-2) \cdot \cos(x)$.

7) מצאו פונקציה שההתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $\cdot F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$

8) תהיו $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a > 0$.

ב. $H(x)e^{-ax} \cos(bx)$ כאשר $a, b > 0$.

ג. $H(x)e^{-ax} \sin(bx)$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\left\{e^{-|x|} \cos(2x)\right\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{i^2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{i^2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2ix^3} \frac{2}{1+x^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \cdot \aleph \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \cdot \beth$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \cdot \daleth$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

$$\cdot F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$\cdot F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$\cdot F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2 + 5}{3}}$

6) נתון כי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ תהיו

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L_{PC}^1(\mathbb{R})$ רציפה היא

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F\left\{x^2 e^{-x^2}\right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F\left\{x \cdot e^{-|x|}\right\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088\right) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

נוסחת הרתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט הרתמרה ההפוכה.

2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi \omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט הרתמרה ההפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\cdot \left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} \right)_{(x)}$

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

תזכורת: רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $\cdot f * f \cdot$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2$

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות המשויות הגזירות בעמימים $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \text{ וגם } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

מצאו פונקציה $g(x) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

5) נגדיר $(f * g)_{(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$. מצאו את הקונבולוציה $g(x) = ?$

$$\cdot F \left\{ \frac{1}{x^2 + a^2} \right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$$

תזכורת:

6) ענה על הטעיפים הבאים:

a. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

b. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$

7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $f * f$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

$$\text{ב. הוכיחו כי } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$$

8) חשבו את הקונבולוציה $f * f$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

9) חשבו את הקונבולוציה $f * f$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$

10) חשבו את הקונבולוציה $\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x)$

11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})(x)$

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

$$\text{הערה: תוכלו להיעזר בעובדה } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

12) מצאו פתרון למשוואת האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$

13) נתנו כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואת האינטגרלית

$$\text{ב. הוכיחו כי } \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2} e^{2xy} dy \equiv 0$$

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} \right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2 + 9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \cdot \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \cdot \mathcal{N} \quad (6)$$

ב. הוכחה.

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \cdot \mathcal{N} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$(\chi_{[0,1]}(x)^* \chi_{[1,2]}(x))_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ x-1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} . \blacksquare \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} . \aleph \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.